第９講　総合問題(1)

1　$2 \leqq a < b \leqq M$ を満たすすべての整数 a，b について不等式

$$3(a^2+b^2)<2(a+b)^2$$

が成り立つような正の整数 M のうち最大のものを求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標平面の x 軸上に定点 A(1, 0), B(−1, 0), y 軸上に定点 C(0, 1), D(0, −1) がある．この平面上の動点 P から線分 AB 上の点までの距離の最大値を M(P), 最小値を m(P) とする．条件

(ア) $M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ または $M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

(イ) $m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ かつ $m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

をともに満たす点 P の存在範囲を K とする．ただし，PC，PD は線分の長さを表す．

(1) K を図示せよ．

(2) 2 直線 $x=1$，$x=-1$ の間にある K の部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　空間内に同一平面上にない4点A，B，C，Dがある．B，Dから直線ACに下ろした垂線の足をそれぞれH，Kとし，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KD}}$ のなす角を θ（$0<\theta<\pi$）とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ のなす角を α とすると $\mathrm{HD}\cos\alpha=\mathrm{KD}\cos\theta$ であることを証明せよ．

(2)　$\angle\mathrm{ABC}$，$\angle\mathrm{ADC}$ がともに直角で，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=b$ であるとき，線分BDの長さを a，b，θ で表せ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　$2 \leqq a < b \leqq M$ を満たすすべての整数 a，b について不等式

$$3(a^2+b^2) < 2(a+b)^2 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つような正の整数 M のうち最大のものを求めよ．

$2 \leqq a < b \leqq M$ より，b を $3 \leqq b \leqq M$ に固定すると

①すなわち　$a^2-4ba+b^2<0$ は a の２次不等式である．

$$f(a)=a^2-4ba+b^2=(a-2b)^2-3b^2 \quad (2 \leqq a \leqq b-1)$$ 　グラフの軸は $a=2b$

また，$2b-(b-1)=b+1>0$ より　$b-1<2b$

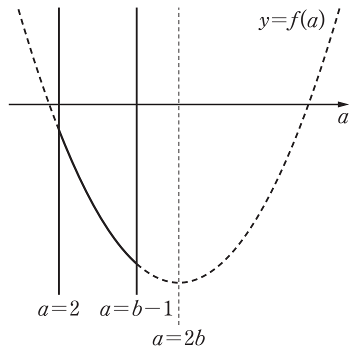
よって　$f(a)<0$ が $2 \leqq a \leqq b-1$ のすべての a で成り立つのは　$f(2)<0$ のときである．

よって　$b^2-8b+4<0$　　つまり　$4-2\sqrt{3}<b<4+2\sqrt{3}$

b は整数より　$1 \leqq b \leqq 7$

ここで b を $3 \leqq b \leqq M$ で動かしたとき

$3 \leqq b \leqq M$　ならば　$1 \leqq b \leqq 7$　が成り立つ整数 M のうち最大のものは $\boldsymbol{M=7}$ である．



2　座標平面の x 軸上に定点 A(1，0)，B(−1，0)，y 軸上に定点 C(0，1)，D(0，−1) がある．この平面上の動点 P から線分 AB 上の点までの距離の最大値を M(P)，最小値を m(P) とする．条件

(ア)　$M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ または $M(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$　　(イ)　$m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PC}$ かつ $m(\mathrm{P}) \leqq \mathrm{PD}$

をともに満たす点 P の存在範囲を K とする．ただし，PC，PD は線分の長さを表す．

(1)　K を図示せよ．

(2)　２直線 $x=1$，$x=-1$ の間にある K の部分の面積を求めよ．

P$(X,\ Y)$ とおくと

$$\mathrm{PA}^2=(X-1)^2+Y^2 \quad \mathrm{PB}^2=(X+1)^2+Y^2 \quad \mathrm{PC}^2=X^2+(Y-1)^2 \quad \mathrm{PD}^2=X^2+(Y+1)^2$$

(1)(i)　$X \geqq 1$ のとき　$M(\mathrm{P})=\mathrm{PB}$　　$m(\mathrm{P})=\mathrm{PA}$

(ア)より　$(X+1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　または　$(X+1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$

つまり　$Y \leqq -X$　または　$Y \geqq X$　……①

(イ)より　$(X-1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　かつ　$(X-1)^2+Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$

つまり　$-X \leqq Y \leqq X$　……②

①かつ②より　$Y=X,\ Y=-X \quad (X \geqq 1)$

(ii)　$0 \leqq X \leqq 1$ のとき　$M(\mathrm{P})=\mathrm{PB}$　$m(\mathrm{P})=|Y|$

(ア)より　①

(イ)より　$Y^2 \leqq X^2+(Y-1)^2$　かつ　$Y^2 \leqq X^2+(Y+1)^2$　……③

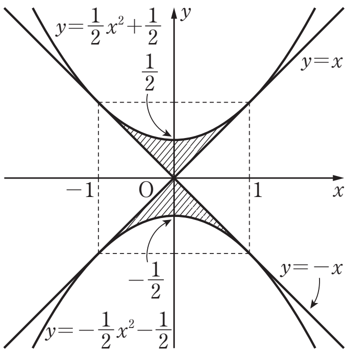
①かつ③より　$-\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2} \leqq Y \leqq -X,\ X \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2} \quad (0 \leqq X \leqq 1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

図形と設定の対称性より点 P の存在範囲は y 軸について対称である.

よって存在範囲 K は右図斜線部分

（境界および直線 $y=\pm x$ 上の点を含む).



(2)　求める面積は　$4\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-x\right\}dx$

$$=4\int_0^1\frac{1}{2}(x-1)^2dx=2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

3　空間内に同一平面上にない 4 点 A, B, C, D がある．B, D から直線 AC に下ろした垂線の足をそれぞれ H, K とし, $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{KD}}$ のなす角を θ $(0<\theta<\pi)$ とする.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ のなす角を α とすると $\mathrm{HD}\cos\alpha=\mathrm{KD}\cos\theta$ であることを証明せよ.

(2)　$\angle\mathrm{ABC}$, $\angle\mathrm{ADC}$ がともに直角で, $\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$, $\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=b$ であるとき, 線分 BD の長さを a, b, θ で表せ.

---

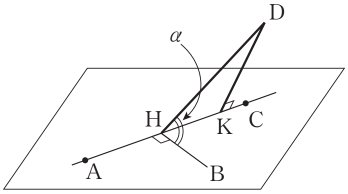
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KD}}=\mathrm{HB}\times\mathrm{KD}\times\cos\theta$　……①　　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\mathrm{HB}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha$　……②

ここで, $\mathrm{HB}\perp\mathrm{AC}$ より　$\mathrm{HB}\perp\mathrm{KH}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KH}}=0$　　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DH}}-\overrightarrow{\mathrm{DK}})=0$

$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{KD}}-\overrightarrow{\mathrm{HD}})=0$

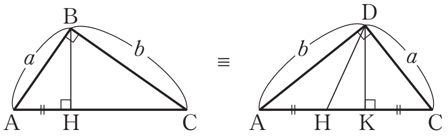
つまり　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KD}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HD}}$　……③



①, ②, ③より　$\mathrm{HB}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{HB}\times\mathrm{KD}\times\cos\theta$

ゆえに　$\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{KD}\times\cos\theta$

(2)　$\triangle\mathrm{ABH}\backsim\triangle\mathrm{ACB}$ より



$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\triangle\mathrm{ADC}\equiv\triangle\mathrm{CAB}$　および　$\triangle\mathrm{CDK}\equiv\triangle\mathrm{ABH}$ より

$\mathrm{KD}=\mathrm{BH}$, $\mathrm{CK}=\mathrm{AH}$

$\mathrm{DH}^2=\mathrm{DK}^2+\mathrm{HK}^2=\mathrm{BH}^2+(\mathrm{AC}-2\mathrm{AH})^2$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\left(\sqrt{a^2+b^2}-\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}=\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}$$

よって, $\triangle\mathrm{BDH}$ で余弦定理より

$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{DH}^2-2\mathrm{BH}\times\mathrm{HD}\times\cos\alpha=\mathrm{BH}^2+\mathrm{DH}^2-2\mathrm{BH}\times\mathrm{KD}\cos\theta$

$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}-2\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\cos\theta=\frac{a^4-2a^2b^2\cos\theta+b^4}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$\mathbf{BD}=\sqrt{\dfrac{a^4-2a^2b^2\cos\theta+b^4}{a^2+b^2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$2 \leqq a < b < c \leqq N$ を満たすすべての整数 a, b, c について不等式

$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　が成り立つような正の整数 N のうち最大のものを求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形が囲む領域（境界を含む）を D とする．2 次関数 $f(x)=(x-a)^2+b$（a，b は定数）に対して，次の条件

「放物線 $y=f(x)$ と領域 D が共有点をもつ」

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a を固定したとき，上の条件が成立するような b の値の範囲を a で表せ．

(2)　上の条件を満たす点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$2 \leqq a < b < c \leqq N$ を満たすすべての整数 a, b, c について不等式
$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　が成り立つような正の整数 N のうち最大のものを求めよ．

$2(a^2+b^2+c^2) < (a+b+c)^2$　……①

$2 \leqq a < b < c \leqq N$ より，［b, c を $3 \leqq b < c \leqq N$ に固定する］と

①すなわち　$a^2-2(b+c)a+b^2-2bc+c^2<0$　は a の2次不等式である．

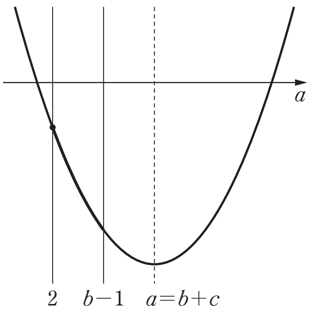
$f(a)=a^2-2(b+c)a+b^2-2bc+c^2$　$(2 \leqq a \leqq b-1)$

グラフの軸は　$a=b+c$

また　$b+c-(b-1)=c+1>0$ より　$b-1<b+c$

よって，$f(a)<0$ が $2 \leqq a \leqq b-1$ のすべての a で成り立つのは $f(2)<0$ のときである．

よって　$b^2-2(c+2)b+c^2-4c+4<0$



ここで，［b を $3 \leqq b \leqq c-1$ で動かす］と，この式は b の2次不等式である．

$g(b)=b^2-2(c+2)b+c^2-4c+4$　$(3 \leqq b \leqq c-1)$

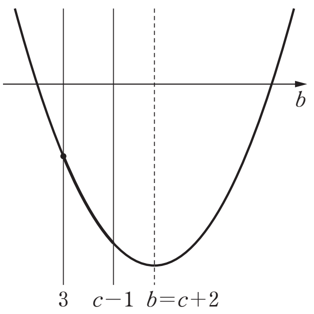
グラフの軸は　$b=c+2$

また　$c-1<c+2$

よって，$g(b)<0$ が $3 \leqq b \leqq c-1$ のすべての b で成り立つのは $g(3)<0$ のときである．

よって　$c^2-10c+1<0$　より　$5-2\sqrt{6}<c<5+2\sqrt{6}$

c は整数より　$1 \leqq c \leqq 9$



ここで，［c を $4 \leqq c \leqq N$ で動かしたとき］

$c \leqq N$　ならば　$1 \leqq c \leqq 9$　が成り立つ整数 N のうち最大のものは $N=$**9** である．

> 2変数関数（3変数関数）に関しては「固定」→「動かす」という手法が時に効く．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形が囲む領域（境界を含む）を D とする．2 次関数 $f(x)=(x-a)^2+b$（a，b は定数）に対して，次の条件

「放物線 $y=f(x)$ と領域 D が共有点をもつ」

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a を固定したとき，上の条件が成立するような b の値の範囲を a で表せ．

(2)　上の条件を満たす点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

(1)　a を固定したとき $y=f(x)$ のグラフは b の値により上下に動く．

よって，$y=f(x)$ のグラフが領域 D と共有点をもつときのグラフの上限と下限の状態およびそのときの $b=-(x-a)^2+y$ の値を考える．

(i)　$1\leqq a$ のとき

グラフが点 $(1,\ 1)$ を通るときが上限で，このとき　$b=-(a-1)^2+1$

点 $(-1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a+1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a+1)^2-1\leqq b\leqq -(a-1)^2+1$

(ii)　$0\leqq a<1$ のとき

グラフの頂点が $y=1$ 上にあるときが上限で，このとき　$b=1$

グラフが点 $(-1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a+1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a+1)^2-1\leqq b\leqq 1$

(iii)　$-1\leqq a<0$ のとき

グラフの頂点が $y=1$ 上にあるときが上限で，このとき　$b=1$

グラフが点 $(1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a-1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a-1)^2-1\leqq b\leqq 1$

(iv)　$a<-1$ のとき

グラフが点 $(-1,\ 1)$ を通るときが上限で，このとき　$b=-(a+1)^2+1$

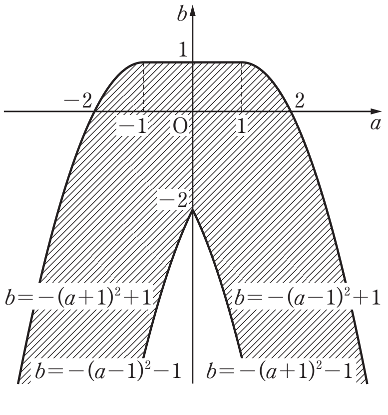
点 $(1,\ -1)$ を通るときが下限で，このとき　$b=-(a-1)^2-1$

よって共有点をもつのは　$-(a-1)^2-1\leqq b\leqq -(a+1)^2+1$

以上より，求める b の値の範囲は

$$\boldsymbol{-(a-1)^2-1\leqq b\leqq -(a+1)^2+1 \quad (a<-1)}$$
$$\boldsymbol{-(a-1)^2-1\leqq b\leqq 1 \quad (-1\leqq a<0)}$$
$$\boldsymbol{-(a+1)^2-1\leqq b\leqq 1 \quad (0\leqq a<1)}$$
$$\boldsymbol{-(a+1)^2-1\leqq b\leqq -(a-1)^2+1 \quad (1\leqq a)}$$

(2)　求める領域は右図斜線部分（境界含む）．



図形と設定の対称性より，a を動かしたとき
(iii)　$-1\leqq a<0$ のときは(ii)のグラフを
(iv)　$a<-1$ のときは(i)のグラフを
それぞれ $a=0$ に関して対称に移動したものとなる．ただし(1)では「a を固定」して考えているため，この表現を使うことはできない．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。